

# DS de mathématiques n°2

Calcul algébrique, sommes et produits,

trigonométrie, complexes, etc. – **Corrigé**

Noté sur 100 pts  $\pm 5$  pts pour le soin et la clarté,  
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 1/5

## Exercice 1 : Un peu de tout !

Les questions 1) à 4) de cet exercice sont indépendantes.

/4 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\left| \frac{x-1}{x+3} \right| \leq 2$ .

L'équation n'a un sens que pour  $x+3 \neq 0$ , i.e.  $x \neq -3$ . En multipliant par  $|x+3|$ , qui est positif, l'équation se réécrit :

$$|x-1| \leq 2|x+3|$$

|       |           |      |      |     |     |           |
|-------|-----------|------|------|-----|-----|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $-3$ | $-3$ | $1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $x-1$ |           | $-$  |      | $-$ |     | $+$       |
| $x+3$ |           | $-$  |      | $+$ |     | $+$       |

— Si  $x \in [1, +\infty[$ , alors l'équation devient :

$$\begin{aligned} x-1 &\leq 2(x+3) \\ \iff -7 &\leq x \end{aligned}$$

Dans ce cas,  $\mathcal{S}_1 = [1, +\infty[$ .

— Si  $x \in ]-\infty, -3]$ , alors l'équation se réécrit :

$$\begin{aligned} -(x-1) &\leq 2(-x-3) \\ \iff -x+1 &\leq -2x-6 \\ \iff x &\leq -7 \end{aligned}$$

Dans ce cas  $\mathcal{S}_2 = ]-\infty, -7]$

— Si  $x \in ]-3, 1[$ , alors l'équation devient :

$$\begin{aligned} -(x-1) &\leq 2(x+3) \quad \text{car } x+3 \geq 0 \\ \iff 1-6 &\leq 2x+x \\ \iff -5 &\leq 3x \\ \iff x &\geq -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Dans ce cas,  $\mathcal{S}_3 = \left[-\frac{5}{3}, 1\right[$

Finalement,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = ]-\infty, -7] \cup \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$$

**Autre méthode :**

$$\begin{aligned} |x-1| &\leq 2|x+3| \\ \iff |x-1|^2 &\leq 4|x+3|^2 \quad \text{par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ \iff (x-1)^2 &\leq 4(x+3)^2 \\ \iff x^2-2x+1 &\leq 4(x^2+6x+9) \\ \iff x^2-2x+1 &\leq 4x^2+24x+36 \\ \iff 3x^2+26x+35 &\geq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est

$$\begin{aligned} \Delta &= 26^2 - 4 \times 3 \times 35 \\ &= (2 \times 13)^2 - 4 \times 3 \times 35 \\ &= 4 \times 13^2 - 4 \times 3 \times 35 \\ &= 4 \times (13^2 - 3 \times 35) \\ &= 4 \times (169 - 105) \\ &= 4 \times 64 \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme admet deux racines réelles :

$$x_{\pm} = \frac{-26 \pm \sqrt{4 \times 64}}{2 \times 3} = \frac{-26 \pm 2 \times 8}{6} = \frac{-26 \pm 16}{6}$$

On a donc  $x_- = \frac{-42}{6} = -7$  et  $x_+ = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$ . Ainsi,  $3x^2 + 26x + 35$  est positif si et seulement si  $x \leq -7$  ou  $x \geq -\frac{5}{3}$ , donc :

$$\mathcal{S} = ]-\infty, -7] \cup \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$$

/3 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sqrt{x-3} = 1 - \sqrt{x}$

L'équation n'a un sens que si  $x-3 \geq 0$  et  $x \geq 0$ , i.e.  $x \geq 3$ . Par croissance de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$ , on a alors  $\sqrt{x} \geq \sqrt{3}$ , de sorte que  $1 - \sqrt{x} < 0 \leq \sqrt{x-3}$ , donc

$$\mathcal{S} = \boxed{\emptyset}$$

/1 3) a) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$ . Exprimer  $S_{n+1}$  en fonction de  $S_n$  et de  $n$ .

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \boxed{S_n + (n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

/4 b) Montrer par récurrence que :  $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(1,5 pour la rédaction et l'initialisation ; 2,5 pour l'hérédité)

On raisonne par récurrence simple.

— Pour  $n = 1$ , on a  $S_1 = 1 \times (1+1) \times (1+2) = 6$  tandis que

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4} = 6$$

— Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose la propriété vraie au rang  $n$ . Montrons que

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}. \text{ On a :}$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= (n+1)(n+2)(n+3) \times \left[\frac{n}{4} + 1\right] \\ &= (n+1)(n+2)(n+3) \times \frac{n+4}{4} \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n+1$ .

Ainsi, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

/5 c) En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^n k^3$ .

(1,5 pour les formules de  $\sum_{k=1}^n k$  et  $\sum_{k=1}^n k^2$  ; 3,5 pour le reste)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= S_n - 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \times [(n+2)(n+3) - 2 \times (2n+1) - 4] \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \times [n^2 + 5n + 6 - 4n - 2 - 4] \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \times [n^2 + n] \\ &= \boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} \end{aligned}$$

/7

- 4) Déterminer toutes les applications  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  qui vérifient  $f(mn) = mf(m) + nf(n)$  pour tous entiers naturels  $m$  et  $n$ .

(2 pour la rédaction et la mention "d'analyse-synthèse"; 4 pour l'analyse, 1 pour la synthèse)

On procède par analyse-synthèse.

— Soit  $f$  une fonction solution. Avec  $m = n = 0$ , on a

$$f(0) = 0 \times f(0) + 0 \times f(0) = 0$$

donc  $f(0) = 0$ . Avec  $m = 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  quelconque, on a

$$f(0 \times n) = 0 \times f(0) + nf(n)$$

de sorte que  $nf(n) = 0$ . Puisque  $n \neq 0$ , on a  $f(n) = 0$ . Ainsi  $f$  est la fonction nulle.

— Vérifions si la fonction nulle  $f : n \mapsto 0$  est effectivement solution. Pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ , on a  $f(mn) = 0$  et

$$mf(m) + nf(n) = m \times 0 + n \times 0 = 0$$

donc  $f$  est bien solution.

Finalement,

$$\mathcal{S} = \boxed{\{n \mapsto 0\}}$$

## Exercice 2 : Calculs dans $\mathbb{C}$

- 1) Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ . Montrer que :

$$\left| \frac{1+iz}{1-iz} \right| = 1 \iff z \in \mathbb{R}$$

/4

$$\begin{aligned} \left| \frac{1+iz}{1-iz} \right| = 1 &\iff \frac{1+iz}{1-iz} \times \overline{\left( \frac{1+iz}{1-iz} \right)} = 1 \\ &\iff (1+iz) \times \overline{1+iz} = (1-iz) \times \overline{1-iz} \\ &\iff (1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z}) \\ &\iff 1-i\bar{z}+iz+z\bar{z} = 1+i\bar{z}-iz+z\bar{z} \\ &\iff -i\bar{z}+iz = i\bar{z}-iz \\ &\iff z-\bar{z} = \bar{z}-z \\ &\iff 2z = 2\bar{z} \\ &\iff z = \bar{z} \\ &\iff \boxed{z \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

- 2) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\theta \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$ . Montrer que :

$$i \times \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

/4

(1,25 pour l'idée de l'angle moitié; 2,75 pour le calcul)

Tout d'abord, comme  $\theta \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$ , on a  $\frac{\theta}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ , donc  $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$  a un sens.

De plus,  $e^{i\theta} \neq -1$ , donc  $1+e^{i\theta}$  a un sens également.

$$\begin{aligned} i \times \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} &= i \times \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} \times (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} \times (e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})} \\ &= -i \times \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= -i \times \frac{2i \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \boxed{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

/4

- 3) On pose  $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ . Déterminer les racines cubiques de  $Z$ .

(2 pour  $Z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ; 2 pour les racines cubiques de  $Z$ )

On remarque que

$$\begin{aligned} 1 + i\sqrt{3} &= 2 \times \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 \times \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

On en déduit aussi que (on pouvait aussi dire “par un calcul similaire”) :

$$1 - i\sqrt{3} = \overline{1 + i\sqrt{3}} = \overline{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Ainsi,

$$Z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

On en déduit que les racines cubiques de  $Z$  sont :

$$e^{i\frac{2\pi}{9}} \quad e^{i\frac{2\pi}{9}} e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad e^{i\frac{2\pi}{9}} e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{e^{i\frac{2\pi}{9}} \quad e^{i\frac{8\pi}{9}} \quad e^{i\frac{14\pi}{9}}}$$

4) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

$$(1 - iz)^3(1 + i\sqrt{3}) = (1 + iz)^3(1 - i\sqrt{3})$$

/6,5

(1 pour le cas  $z = -i$  à part; 1,5 pour les trois valeurs de  $\frac{1 - iz}{1 + iz}$ ; 4 pour le reste)

— Si  $z = i$ , alors  $1 + iz = 0$ , et l'équation devient :

$$2^3(1 + i\sqrt{3}) = 0$$

ce qui est impossible. Dans ce cas,  $\mathcal{S}_1 = \emptyset$ .

— Si  $z \neq i$ , alors l'équation devient :

$$\begin{aligned} (1 - iz)^3(1 + i\sqrt{3}) &= (1 + iz)^3(1 - i\sqrt{3}) \\ \iff \left( \frac{1 + iz}{1 - iz} \right)^3 &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} = Z \end{aligned}$$

Cela revient à dire que le complexe  $\frac{1 + iz}{1 - iz}$  est une racine cubique de  $Z$ . Par la question 3), on en déduit que

$$\frac{1 + iz}{1 - iz} \in \left\{ e^{i\frac{2\pi}{9}}, e^{i\frac{8\pi}{9}}, e^{i\frac{14\pi}{9}} \right\}$$

Soit  $\theta \in \left\{ \frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9} \right\}$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{1 + iz}{1 - iz} &= e^{i\theta} \\ \iff 1 + iz &= e^{i\theta} - ie^{i\theta}z \\ \iff iz(1 + e^{i\theta}) &= e^{i\theta} - 1 \end{aligned}$$

Or, si on avait  $e^{i\theta} = -1$ , alors on aurait  $\theta \equiv \pi [2\pi]$ , ce qui n'est clairement pas le cas. Ainsi,  $1 + e^{i\theta} \neq 0$ . Ainsi  $1 - e^{i\theta} = iz(1 + e^{i\theta})$  équivaut à

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{i} \times \frac{e^{i\theta} - 1}{1 + e^{i\theta}} \\ &= -i \times \frac{e^{i\theta} - 1}{1 + e^{i\theta}} \\ &= i \times \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} \\ &= \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

par la question 2). Dans ce cas,  $\mathcal{S}_2 = \left\{ \tan \frac{\pi}{9}, \tan \frac{4\pi}{9}, \tan \frac{7\pi}{9} \right\}$ .

Finalement

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \boxed{\left\{ \tan \frac{\pi}{9}, \tan \frac{4\pi}{9}, \tan \frac{7\pi}{9} \right\}}$$

/2,5 5) Le résultat obtenu à la question 4) est-il cohérent avec celui de la question 1) ?

Les solutions ont été obtenues en résolvant

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = Z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

En particulier,

$$\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^3 = |Z| = 1$$

donc  $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$ . La question 1) entraîne  $z \in \mathbb{R}$ . C'est cohérent avec ce qu'on a obtenu en résolvant l'équation, puisque l'ensemble  $\mathcal{S}$  ne contient que des réels.

### Exercice-problème 3 : Sommes des cosinus carrés

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx) \quad \text{et} \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$$

/1,5 1) Donner la valeur de  $A_n(x)$  et de  $B_n(x)$  lorsque  $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ .

Lorsque  $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , alors pour tout entier naturel  $k$ , on a  $kx \equiv 0 \pmod{2k\pi}$  donc en particulier  $kx \equiv 0 \pmod{2\pi}$ . On en déduit que  $\cos(kx) = 1$ . Ainsi,

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n 1 = \boxed{n+1}$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n 1^2 = \boxed{n+1}$$

2) À partir de cette question, on suppose que  $x$  est un réel quelconque dans  $\mathbb{R}$  et  $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ .

/2 a) En justifiant, compléter la formule  $\sin(a) \cos(b) = \dots\dots$  pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

On a

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{cases}$$

En sommant ces lignes, on a :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin(a) \cos(b)$$

et donc

$$\sin(a) \cos(b) = \boxed{\frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]}$$

b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) A_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)$$

/9

(1,5 pour la rédaction et l'initialisation ; 7,5 pour le reste)

On raisonne par récurrence.

— Pour  $n = 0$ , on a  $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) A_0(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \times 1$ . Cependant,

$$\cos\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) = \cos(0) \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

La propriété est donc vérifiée au rang 0.

— Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose la propriété vraie au rang  $n$ . Montrons-la au rang  $n+1$ .

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) A_{n+1}(x) &= \sin\left(\frac{1}{2}x\right) [A_n(x) + \cos((n+1)x)] \\ &= \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos((n+1)x) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\frac{nx}{2} + \frac{n+1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{nx}{2} - \frac{n+1}{2}x\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\frac{x}{2} + (n+1)x\right) + \sin\left(\frac{x}{2} - (n+1)x\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\left(-\frac{1}{2}x\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\left(n + \frac{3}{2}\right)x\right) + \sin\left(-\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\left(n + \frac{3}{2}\right)x\right) \end{aligned}$$

Or, inversement :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)\sin\left(\frac{(n+2)}{2}x\right) &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(n+1)}{2}x + \frac{(n+2)}{2}x\right) + \sin\left(\frac{(n+1)}{2}x - \frac{(n+2)}{2}x\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n + \frac{3}{2}\right)x\right) + \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\left(n + \frac{3}{2}\right)x\right)\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang  $n + 1$ .

Finalement, la propriété est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**3)** Démontrer, à l'aide d'une formule trigonométrique, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$B_n(x) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}A_n(2x)$$

$$\begin{aligned}B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \cos^2(kx) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2}[1 + \cos(2kx)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2kx) \\ &= \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}A_n(2x)\end{aligned}$$

**4)** Exprimer  $A_n(x)$  en fonction de  $n$  et de  $x$ .

— Si  $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ , alors en particulier  $\frac{x}{2} \not\equiv 0 \pmod{\left[\frac{\pi}{2}\right]}$ , d'où  $\frac{x}{2} \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ , ce qui permet d'affirmer que  $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ . Alors, la question **b)** donne directement :

$$A_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

ce qu'on peut d'ailleurs simplifier en :

$$\begin{aligned}A_n(x) &= \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \times \frac{1}{2} \left( \sin\left(\frac{n+1}{2}x + \frac{n}{2}x\right) - \sin\left(\frac{n+1}{2}x - \frac{n}{2}x\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \times \frac{1}{2} \left( \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \right) \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

— Si  $x \equiv 0 \pmod{\pi}$ , alors, puisque  $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$  par hypothèse, on a  $x \equiv \pi \pmod{2\pi}$ , si bien que  $\cos(k\pi) = (-1)^k$

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{1 - (-1)} = \boxed{\frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1})}$$

**5)** En distinguant les cas  $x \equiv 0 \pmod{\pi}$  et  $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ , en déduire une expression de  $B_n(x)$  en fonction de  $n$  et de  $x$ .

(On est toujours dans le cas  $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ ). On a vu en question **3)** que

$$B_n(x) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}A_n(2x)$$

(cependant, il faut faire attention car  $A_n(2x)$  n'est pas nécessairement égal à l'expression  $\frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)2x\right)}{2\sin(x)} - \frac{1}{2}$  car on risque de diviser par 0 si  $x \equiv 0 \pmod{\pi}$  !)

— Si  $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ , alors, en posant  $x' = 2x$ , on a  $x' \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ . Ceci permet d'utiliser l'expression de la question **4)** pour calculer  $A_n(x')$ .

$$A_n(x') = A_n(2x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x)} \cos(nx)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}B_n(x) &= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}A_n(2x) \\ &= \boxed{\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x)} \cos(nx)}\end{aligned}$$

— Si  $x \equiv 0 \pmod{\pi}$ , alors  $2x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , et par la question 1), on a  $A_n(2x) = n+1$ .  
On en déduit que

$$B_n(x) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}(n+1) = \boxed{n+1}$$

6) On pose  $C_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos^3(kx)$ .

a) Montrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  qu'on déterminera tels que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \cos^3(y) = \alpha \cos(3y) + \beta \cos(y)$$

Soit  $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos^3(y) &= \left( \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{i3y} + 3e^{iy} + 3e^{-iy} + e^{-i3y}) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos(3y) + 3 \times 2\cos(y)) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}\cos(3y) + \frac{3}{4}\cos(y)} \end{aligned}$$

Ainsi, on a la relation voulue avec  $\alpha = \boxed{\frac{1}{4}}$  et  $\beta = \boxed{\frac{3}{4}}$ .

b) En déduire une expression de  $C_n(x)$  en fonction de  $n$  et de  $x$ .

Par ce qui précède :

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \sum_{k=0}^n \cos^3(kx) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{4} \cos(3kx) + \frac{3}{4} \cos(kx) \right) \quad (\text{avec } y = kx) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n \cos(3kx) + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^n \cos(kx) \\ &= \frac{1}{4} A_n(3x) + \frac{3}{4} A_n(x) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, on suppose  $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ , donc on sait que  $A_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$  par la question 4).

— Si  $3x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , i.e.  $x \equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$ , on a  $A_n(3x) = n+1$  par la question 1). Ainsi :

$$C_n(x) = \boxed{\frac{1}{4} \times (n+1) + \frac{3}{4} \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

— Si  $3x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ , i.e.  $x \not\equiv 0 \pmod{\frac{2\pi}{3}}$ , on a :

$$C_n(x) = \boxed{\frac{1}{4} \times \frac{\sin\left(\frac{3}{2}(n+1)x\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)} \cos\left(\frac{3nx}{2}\right) + \frac{3}{4} \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}$$

### Exercice 4 : Somme liée à $e^{\frac{2i\pi}{7}}$

Soit  $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ . On pose :  $S = u + u^2 + u^4$  et  $T = u^3 + u^5 + u^6$ .

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\omega$  une racine  $n$ -ième de l'unité. Calculer  $\sum_{k=1}^n \omega^k$ .

(0,75 pour le cas  $\omega = 1$  à part; 1,75 pour le reste)

— Si  $\omega = 1$ , alors

$$\sum_{k=1}^n \omega^k = \sum_{k=1}^n 1 = \boxed{n}$$

— Si  $\omega \neq 1$ , alors, puisque  $\omega^n = 1$ ,

$$\sum_{k=1}^n \omega^k = \omega \times \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = \omega \times \frac{1 - 1}{1 - \omega} = \boxed{0}$$

/5 2) Calculer  $S + T$  et  $S \times T$ .

(2,5 pour chacun)

$$\begin{aligned} S + T &= u + u^2 + u^4 + u^3 + u^5 + u^6 \\ &= \sum_{k=1}^6 u^k \\ &= \sum_{k=1}^7 u^k - u^7 \end{aligned}$$

Or,  $u$  est une racine 7-ième de l'unité, et  $u \neq 1$ , donc par la question précédente,

$$S + T = 0 - u^7 = \boxed{-1}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} S \times T &= (u + u^2 + u^4) \times (u^3 + u^5 + u^6) \\ &= u^4 + u^6 + u^7 + u^5 + u^7 + u^8 + u^7 + u^9 + u^{10} \\ &= u^4 + u^6 + 1 + u^5 + 1 + u + 1 + u^2 + u^3 \\ &= 3 + \sum_{k=1}^6 u^k \\ &= 3 + (-1) = 2 \\ &= u \times u^3 \times (1 + u + u^3) \times (1 + u^2 + u^3) \\ &= u^4 \times (1 + u^2 + u^3 + u + u^3 + u^4 + u^3 + u^5 + u^6) \\ &= u^4 \times (1 + u + u^2 + 3u^3 + u^4 + u^5 + u^6) \end{aligned}$$

Or,  $u + u^2 + \dots + u^6 = -1$ , donc on en déduit que :

$$S \times T = u^4 \times (2u^3) = 2u^7 = \boxed{2}$$

/6 3) En déduire les valeurs de  $S$  et de  $T$ .

Par ce qui précède

$$\begin{cases} S + T = -1 \\ S \times T = 2 \end{cases}$$

Cela revient à dire que  $S$  et  $T$  sont les racines du polynôme  $z^2 + z + 2$ , dont le discriminant est

$$\Delta = 1 - 8 = -7$$

Ainsi, le polynôme admet deux racines distinctes :

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$$

On a donc deux possibilités :  $(S, T) = (z_1, z_2)$  ou  $(S, T) = (z_2, z_1)$ . Or, on remarque que

$$\operatorname{Im} z_2 < 0 < \operatorname{Im} z_1$$

Ceci va nous permettre de déterminer si  $S = z_1$  ou  $S = z_2$ . En effet,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} S &= \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} u^2 + \operatorname{Im} u^4 \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

Or, comme sinus est croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , on a  $\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ . Ainsi,  $\operatorname{Im} S > 0$ . On en déduit que  $S = z_1$  et  $T = z_2$ . Ainsi :

$$S = \boxed{\frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}} \quad T = \boxed{\frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}}$$



### Exercice 5 : Vous en voulez encore ? Voici le boss final...

Soit  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . En utilisant le fait que pour tout réel  $x$ , on a  $(1+x)^{n+p} = (1+x)^n(1+x)^p$ , montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n+p \rrbracket \quad \binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{p}{k-i}$$

/13 En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

(9 points pour la première partie ; 4 points pour la seconde)

$$\begin{aligned} (1+x)^n(1+x)^p &= \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i 1^{n-i} \right) \left( \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} x^j 1^{p-j} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^p \binom{n}{i} x^i \binom{p}{j} x^j \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^p \binom{n}{i} \binom{p}{j} x^{i+j} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^{p+i} \binom{n}{i} \binom{p}{k-i} x^k \quad \text{avec } k = j+i \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{p+n} \binom{n}{i} \binom{p}{k-i} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{p}{k-i} x^k \end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$(1+x)^{n+p} = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k$$

et donc en identifiant les coefficients de ces deux polynômes, on trouve, pour tout  $k \in \llbracket 0, n+p \rrbracket$  :

$$\binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{p}{k-i}$$

Il reste à montrer que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{p}{k-i} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{p}{k-i}$$

— Si  $k \geq n$ , alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{p}{k-i} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{p}{k-i} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^k \binom{n}{i} \binom{p}{k-i}}_{=0 \text{ car } i > n} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{p}{k-i} \end{aligned}$$

— Si  $k < n$ , alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{p}{k-i} &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{p}{k-i} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^n \binom{n}{i} \binom{p}{k-i}}_{=0 \text{ car } k-i < 0} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{p}{k-i} \end{aligned}$$

Finalement, on a bien

$$\binom{n+p}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{p}{k-i}$$